TU ESCUELA
EN CASA

Ministerio de
EDUCACIÓN

GOBIERNO DE LA PROVINCIA DE CÓRDOBA | entre todos

Razones trigonométricas

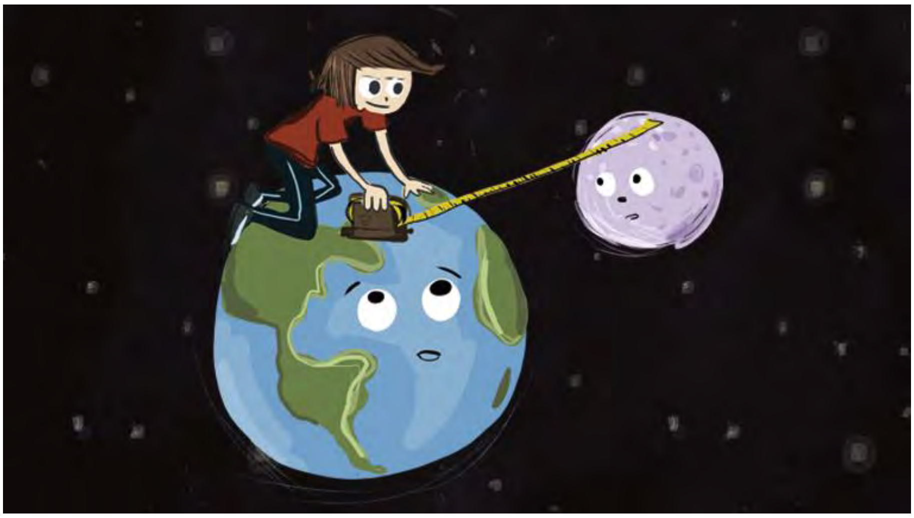
NIVEL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA / 3.° AÑO

MATEMÁTICA

Palabras clave: razones trigonométricas / trigonometría / triángulos / seno / coseno / tangente

ISEP

Razones trigonométricas



:: Presentación

En esta secuencia de actividades, les proponemos ingresar en el conocimiento de una rama de la matemática que tiene sus orígenes hace más de 3.000 años, la **trigonometría**. En aquellos tiempos, los babilonios y los egipcios establecieron aproximaciones de medidas de los ángulos y lados de triángulos rectángulos. Las utilizaban en ciertas mediciones para la agricultura y para la construcción de monumentos como las pirámides. En la actualidad, la trigonometría se usa en astronomía, navegación, termodinámica, telecomunicaciones y electricidad entre otras disciplinas.

¡Vamos a conocerla!

:: Parada 1. Camino al sol

¿Se les ocurre cómo calcular la distancia de la Tierra al Sol? Para responder a esta pregunta, recurrimos a la matemática. Es a través del uso de las razones trigonométricas que se puede (dentro sus infinitos usos) calcular distancias enormes de un modo práctico, es decir, sin tener que realizar un viaje espacial para saber a cuánta distancia estamos del Sol.

Si poseen conexión a internet, los invitamos a ver cuáles fueron las primeras estrategias empleadas para determinar las distancias desde la Tierra a la Luna o al Sol.

¿Cómo medimos el COSMOS?

(Con Aldo de El Robot de Platón) - CuriosaMente 127

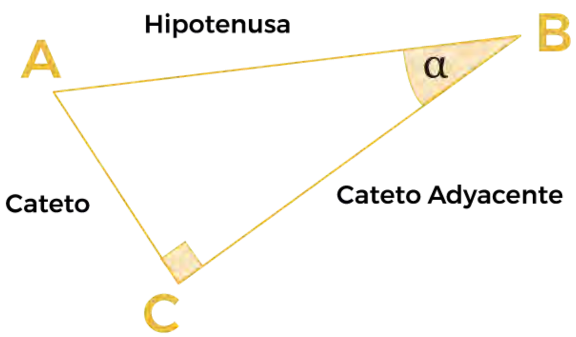
CLIC AQUÍ PARA VER EL VIDEO
https://bit.ly/3AsHc21

Como pudieron ver en el video, una de las primeras personas en calcular la distancia entre la Tierra y la Luna fue Aristarco de Samos, en el siglo III a. C. Él observó que, cuando desde su pueblo se veía media luna, era posible identificar un triángulo rectángulo entre el Sol, la Tierra y la Luna. Advirtió que el Teorema de Pitágoras no le resultaba útil para calcular la distancia porque solo conocía una de las distancias, la distancia a la Luna (la estimó observando un eclipse). Entonces, comenzó a pensar en otra estrategia.

Se dio cuenta de que podía medir el ángulo que se formaba desde la Tierra entre el Sol y la Luna. Entonces se preguntó si sería posible hallar relaciones entre ángulos y distancias para poder, de este modo, calcular distancias sin necesidad de ir hasta ahí. Las relaciones de las que estamos hablando se denominan relaciones (o razones) trigonométricas.

Para recordar

Las primeras **razones trigonométricas** que estudiaremos son tres: seno, coseno y tangente. Para definirlas, tenemos que contar con un triángulo rectángulo en el que llamaremos α (alfa) a uno de sus ángulos interiores agudos:



La hipotenusa siempre es el lado que se opone al ángulo recto.

El cateto opuesto es el lado que se opone al ángulo que están considerando.

El cateto adyacente es el lado que forma el ángulo considerado con la hipotenusa.

Razón	Símbolo	Definición	Ejemplo
Seno	$sen\ (\alpha)$	$sen\ (\alpha) = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa}$	$sen\ (\alpha) = \frac{AC}{AB}$
Coseno	$cos\ (\alpha)$	$cos\ (\alpha) = \frac{Cateto\ Adyacente}{Hipotenusa}$	$cos\ (\alpha) = \frac{CB}{AB}$
Tangente	$tg\ (\alpha)$	$tg\ (\alpha) = \frac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ Adyacente}$	$tg\ (\alpha) = \frac{AC}{CB}$

Algo importante de observar es que las relaciones trigonométricas solo dependen del ángulo que se está considerando, dado que si los triángulos rectángulos tienen el mismo ángulo agudo, resultan semejantes y estas relaciones no varían.
Pueden visitar la actividad modular "Semejanza de figuras (Parte II). Triángulos", para recordar lo que necesiten sobre semejanza de triángulos.

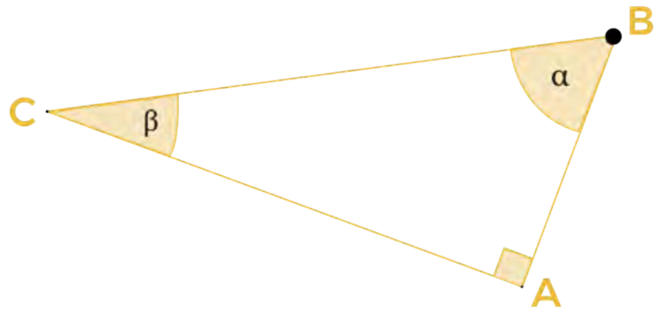
Para explorar

Si poseen conexión a internet, pueden ingresar en el siguiente *applet*: https://www.geogebra.org/m/ucdwdzvj.
Seleccionen la medida de uno de los catetos, y vayan modificando el valor de este para observar que las razones no varían. Luego, si desean, pueden probar con otros ángulos.

A continuación, los invitamos a completar las siguientes actividades para conocer un poco más sobre las razones trigonométricas.

ACTIVIDAD 1 | A calcular

1) Considerando este triángulo rectángulo y teniendo en cuenta las definiciones planteadas más arriba, completen con los lados correspondientes a las razones indicadas:



a	$sen\ (\alpha) =$	d	$cos\ (\alpha) =$
b	$sen\ (\beta) =$	e	$tg\ (\alpha) =$
c	$cos\ (\beta) =$	f	$tg\ (\beta) =$

2) Escriban un "machete" de aquello que tengan que recordar para obtener las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo.

3)

a) ¿Cuánto deberían medir los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo si el $sen\,(\alpha) = \frac{4}{5}$?

b) Dibujen el triángulo y expliquen cómo lo pensaron.

c) El triángulo dibujado ¿es el único cuyo $sen\,(\alpha) = \frac{4}{5}$? ¿O existen otras posibilidades? ¿Por qué?

4)

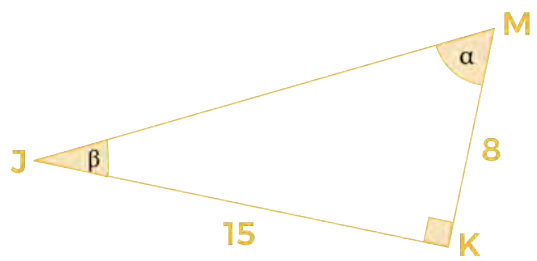
a) ¿Cuánto debería medir la hipotenusa de un triángulo rectángulo si la $tg\,(\alpha) = \frac{5}{12}$?

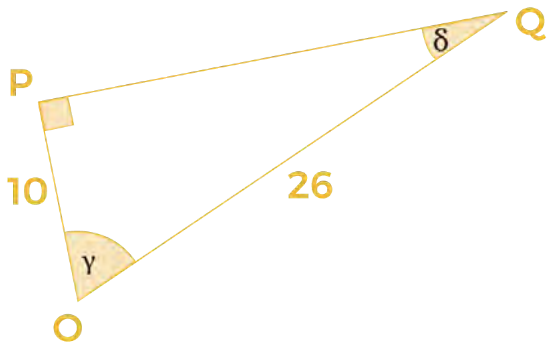
b) Dibujen el triángulo y expliquen cómo lo pensaron.

c) El triángulo dibujado ¿es el único cuya $tg\,(\alpha) = \frac{5}{12}$? ¿Existen otras posibilidades? ¿Por qué?

5) Dados estos triángulos, determinen las siguientes relaciones, y completen la tabla.

Pista: recuerden que pueden utilizar el teorema de Pitágoras para calcular el valor de un lado desconocido en un triángulo rectángulo, cuando se conoce el valor de los otros dos lados.



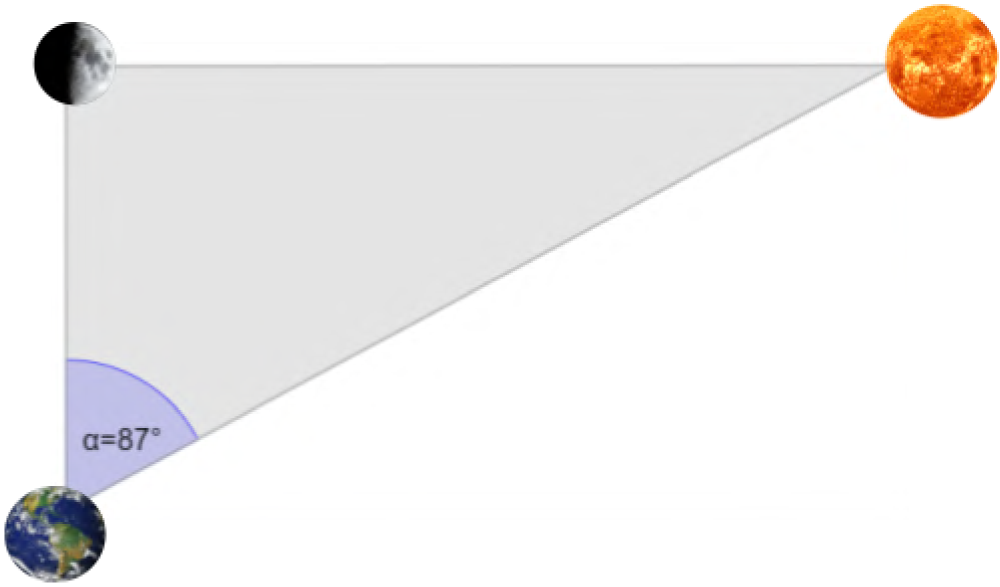


a	$sen\,(\alpha) =$	d	$sen\,(\delta) =$
b	$sen\,(\beta) =$	e	$cos\,(\_) = \frac{12}{13}$
c	$\_\_\_\,(\gamma) = \frac{10}{26}$	f	$\_\_\_\,(\_) = \frac{12}{5}$

:: Parada 2. Como lo hizo Aristarco y algo más...

Les proponemos continuar desandando los pasos de Aristarco para calcular la distancia de la Tierra al Sol.

Veamos el triángulo rectángulo que observó el astrónomo y matemático griego:



Adaptado de Pixabay

Aclaración: La imagen es representativa de la situación, no está realizada a escala.

Mediante esta figura, identificó que la distancia del Sol a la Tierra se correspondía con la hipotenusa. Estimó que el ángulo que se forma entre el Sol y la Luna, desde la Tierra, medía 87º (decimos medía porque esta medida con el paso de los años y la invención de instrumentos de medición más precisos permitieron determinar que el ángulo mide 89,853°). Además, estimó que la distancia desde la Tierra a la Luna era de 384.000 km (esta es una excelente aproximación, el valor que actualmente se considera es de 384.317 km). Conociendo el valor del coseno del ángulo de 87°, escribió:

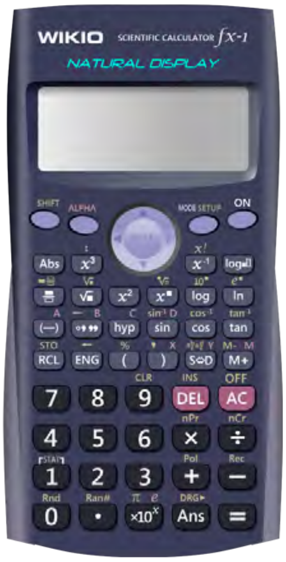
$$cos\ (\alpha)\ = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa}$$

$$cos\ (87°)\ = \frac{Distancia\ Tierra\ Luna}{Distancia\ Tierra\ Sol}$$

Luego, $$Distancia\ Tierra\ Sol\ = \frac{384000\ Km}{cos\ (87°)}$$

Entonces $$Distancia\ Tierra\ Sol\ =\ 7\ 337\ 211.8\ km$$

Pista: para conocer el valor del coseno, el seno o la tangente de diferentes ángulos, se buscaba en unas tablas en las que estaba registrado el valor de la razón con respecto a la medida del ángulo (cada medio grado).
En la actualidad, recurrimos a las calculadoras científicas. En esta oportunidad, mediremos los ángulos en grados, minutos y segundos, por lo que la calculadora deberá estar en el modo *Degree* (grados sexagesimales), en el visor habitualmente aparece un D o DEG.



En nuestra calculadora para obtener el $cos\ (87°)$ presionamos 

.

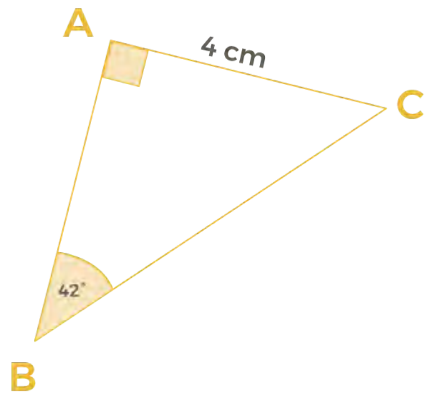
Como ya vimos anteriormente, Aristarco probó que el Sol estaba a $7\ 337\ 211.8\ km$ de la Tierra, bastante más lejos que la Luna de la Tierra. Aplicó la geometría de manera excepcional, sin embargo, esa diferencia de “apenas” dos grados en esos ángulos que están muy próximos a los 90° o a los 0°, afectan demasiado la medida de los lados del triángulo, esta es la razón por lo que la medición no fue tan precisa. La medida estimada actualmente ronda los 150 millones de kilómetros.

Los invitamos a resolver las siguientes actividades, de modo similar al aplicado por Aristarco, en esta oportunidad, lo haremos directamente sobre triángulos.

ACTIVIDAD 2 | ¡Manos a la obra!

1) Micaela y Karen están resolviendo una actividad que les dejó de tarea su profesora de Matemática:

   Calcula las medidas de los lados de este triángulo rectángulo.



Realizaron estas cuentas:

Micaela

$$sen(B) = \frac{AC}{BC} \Rightarrow sen(42°) = \frac{4}{BC} \Rightarrow BC = \frac{4}{sen(42°)} \Rightarrow BC = 5.9779\ cm$$

$$tg(B) = \frac{AC}{AB} \Rightarrow tg(42°) = \frac{4}{AB} \Rightarrow AB = \frac{4}{tg\ (42°)} \Rightarrow AB = 4.4424\ cm$$

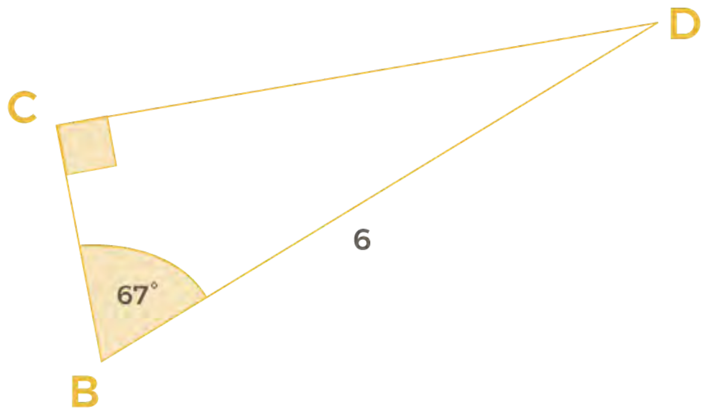
Karem

$$tg(B) = \frac{AC}{AB} \Rightarrow tg(42°) = \frac{4}{AB} \Rightarrow AB = \frac{4}{tg\ (42°)} \Rightarrow AB = 4.4424\ cm$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 4.4424^2 + 4^2 = BC^2 \Rightarrow BC = 5.9779\ cm$$

¿Son correctos los procedimientos empleados por las estudiantes? ¿Por qué? ¿Existirá otra forma de resolver la actividad? ¿Cuál?

2) Dado este triángulo rectángulo:



a) Elijan la combinación de cálculos que les permita calcular la medida de sus lados:

- $\overline{CD} = cos\ (23°) \cdot 9$
- Conociendo $\overline{CD}$, $\overline{BC} = \frac{\overline{CD}}{tg(67°)}$
- $\overline{BC} = cos(67°) \cdot 9$
- Conociendo $\overline{BC}$, $\overline{CD}^2 = 9^2 - \overline{BC}^2$.
- Conociendo $\overline{CD}$, $\overline{BC} = tg\ (23°) \cdot \overline{CD}$
- $\overline{CD} = sen(67°) \cdot 9$
- Conociendo $\overline{CD}$, $BC^2 = 9^2 - \overline{CD}^2$.
- Conociendo $\overline{BC}$, $\overline{CD} = \frac{\overline{BC}}{tg(23°)}$
- Conociendo $\overline{BC}$, $\overline{CD} = tg\ (67°) \cdot \overline{BC}$
- $\overline{BC} = sen(23°) \cdot 9$

b) Calculen las medidas de los lados.

3) Dado el triángulo rectángulo ABC y, sabiendo que el ángulo $B\hat{A}C$ es recto, que $A\hat{C}B$ mide 40° y que el lado $\overline{AC}$ mide 9,5 cm, determinen las medidas de todos los lados y del ángulo restante.

Si en la escuela habilitaron un espacio virtual, pueden compartir sus producciones o conservarlas para cuando regresen a la presencialidad.

:: Referencia

CuriosaMente. (25 de agosto de 2019). *¿Cómo medimos el COSMOS? (Con Aldo de El Robot de Platón) - CuriosaMente 127* [Archivo de video]. Disponible en https://www.youtube.com/watch?v=wtWkJX96R6c

---

ORIENTACIONES PARA LOS Y LAS DOCENTES

En esta secuencia de actividades, proponemos abordar contenidos del eje Geometría y medida, particularmente los referidos a razones trigonométricas y a la resolución de problemas con triángulos rectángulos. Comenzamos con un breve recorrido sobre la historia de la trigonometría y sus numerosas aplicaciones, para luego centrarnos en definir las relaciones seno, coseno y tangente de un ángulo y, a partir de ellas, calcular ángulos y lados de triángulos rectángulos utilizando la calculadora.
En esta oportunidad, nos centraremos solo en la resolución de triángulos, en los próximos encuentros avanzaremos en la aplicación de la trigonometría en situaciones más próximas a la realidad.

FICHA TÉCNICA:

Secuencia: Razones trigonométricas

Nivel: Secundario

Curso sugerido: 3.º año

Asignatura: Matemática

Eje curricular: Geometría y medida

Objetivos:

- Emplear y explicitar las propiedades de figuras y cuerpos geométricos en la resolución de problemas.
- Utilizar y analizar las razones trigonométricas para resolver problemas extramatemáticos e intramatemáticos, recurriendo cuando sea posible al uso reflexivo de recursos tecnológicos y reconociendo el límite del modelo para comprender el problema.

Aprendizajes y contenidos:

- Utilización de razones trigonométricas para resolver problemas con triángulos rectángulos.

Sobre la producción de este material

Los materiales de *Tu Escuela en Casa* se producen de manera colaborativa e interdisciplinaria entre los distintos equipos de trabajo.

Autoría: Ana Antuña y Romina Prevero
Didactización: Esteban Cavalletto
Corrección literaria: Cecilia Villafañe
Diseño: Ana Gauna y Carolina Cena
Ilustración: Federico Duelli

Coordinación de *Tu Escuela en Casa*: Flavia Ferro y Fabián Iglesias

---

Citación:
Antuña, A.; Prevero, R. y equipos de producción del ISEP. (2021). Razones trigonométricas. *Tu Escuela en Casa*. Para el Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba.

COMUNIDAD DE PRÁCTICAS:
La clase en plural

La Comunidad de prácticas es un espacio de generación de ideas y reinvención de prácticas de enseñanza, donde se intercambian experiencias para hacer escuela juntos/as. Los/as invitamos a compartir las producciones que resulten de la implementación de esta propuesta en sus instituciones y aulas, pueden enviarlas a: tuescuelaencasa@isep-cba.edu.ar

ISEP

Los contenidos que se ponen a disposición en este material son creados y curados por el Instituto Superior de Estudios Pedagógicos (ISEP), con el aporte en la producción de los equipos técnicos de las diferentes Direcciones Generales del Ministerio de Educación de la provincia de Córdoba.

Ministerio de EDUCACIÓN

CÓRDOBA entre todos